Chapitre 1 : Suites numériques réelles

I. Rappel de la classe de Première.

1. Définition d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique

- *Une suite est* ***arithmétique*** *si elle vérifie la relation de récurrence : $U_{n+1} = U_n + r$ où r est la raison de la suite*
- ***Le terme général*** *d'une suite arithmétique, c'est-à-dire l'expression de U_n en fonction de n, est donnée par la formule :*
  - ✓ $\boldsymbol{U_n = U_0 + nr}$: *U_0 est le 1er terme de la suite*
  - ✓ $\boldsymbol{U_n = U_1 + (n-1)r}$: *U_1 est le 1er terme de la suite*

- *Une suite est* ***géométrique*** *si elle vérifie la relation de récurrence : $U_{n+1} = qU_n$ où q est la raison de la suite*
- ***Le terme général*** *d'une suite géométrique c'est-à-dire l'expression de U_n en fonction de n , est donnée par la formule :*
  - ✓ $\boldsymbol{U_n = U_0 \times q^n}$: *U_0 est le 1er terme de la suite*
  - ✓ $\boldsymbol{U_n = U_0 \times q^{n-1}}$: *U_1 est le 1er terme de la suite*

2. Comment démontrer qu'une suite est arithmétique

On calcule $U_{n+1} - U_n$ et le résultat doit être une constante, c'est-à-dire indépendante de n. Le résultat obtenu correspond à la raison de la suite.

a. La suite est une fonction de n : $\boldsymbol{U_n = f(n)}$

$U_n = 5n - 2$

$$U_{n+1} - U_n = \left[\underbrace{5(n+1) - 2}_{U_{n+1}}\right] - \left[\underbrace{5n - 2}_{U_n}\right]$$

$$U_{n+1} - U_n = 5n + 5 - 2 - 5n + 2$$

$$U_{n+1} - U_n = 5$$

Donc U_n est une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $U_0 = 5 \times 0 - 2 = -2$

b. *Cas d'une suite récurrente* : $\boldsymbol{U_{n+1} = f(U_n)}$

$$U_{n+1} = U_n + 2n + 4\ ;\ U_0 = 3\ ;\ \ V_n = U_n + 1 - n^2$$

$$V_{n+1} - V_n = \left[\underbrace{U_{n+1} + 1 - (n+1)^2}_{\boldsymbol{V_{n+1}}}\right] - \left[\underbrace{U_n + 1 - n^2}_{\boldsymbol{V_n}}\right]$$

$$V_{n+1} - V_n = U_n + 2n + 4 + 1 - (n+1)^2 - U_n - 1 + n^2$$

$$V_{n+1} - V_n = U_n + 2n + 4 + 1 - n^2 - 2n - 1 - U_n - 1 + n^2$$

$$V_{n+1} - V_n = 4$$

Donc V_n est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $V_0 = U_0 + 1 - 0^2 = 3 + 1 - 0 = 4$

3. *Comment démontrer qu'une suite est géométrique*

On calcule $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et le résultat doit être une constante c'est-à-dire indépendante de n. Le résultat obtenu est égale à la raison de la suite.

a. *La suite est une fonction de n* : $\boldsymbol{U_n = f(n)}$

$$U_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{(n+1)+1}}{3^{n+1}}}{\frac{2^{n+1}}{3^n}} = \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2-(n+1)}}{3^{n+1-n}} = \frac{2}{3} = q$$

Donc U_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme

$$U_0 = \frac{2^{0+1}}{3^0} = 2$$

b. ***La suite est définie par une relation de récurrence :*** $\boldsymbol{U_{n+1} = f(U_n)}$

$$U_{n+1} = 2U_n - 5\ ;\ U_0 = -1 \quad et \quad V_n = U_n - 5$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5} = \frac{2U_n - 5 \quad - 5}{U_n - 5} = \frac{2U_n - 10}{U_n - 5} = \frac{2(U_n - 5)}{U_n - 5} = 2$$

Donc V_n est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 5 = -1 - 5 = -6$

c. Cas de 2 suites récurrentes : $\boldsymbol{V_n = f(U_n)}$

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{3 - U_n}\ ;\ U_0 = 1\ ;\ V_n = \frac{2 - U_n}{U_n}$$

- ***On commence à calculer*** $\boldsymbol{V_{n+1}}$ ***:***

$$V_{n+1} = \frac{2 - U_{n+1}}{U_{n+1}} = \frac{2 - \frac{U_n}{3 - U_n}}{\frac{U_n}{3 - U_n}} = \frac{\frac{2(3 - U_n) - U_n}{3 - U_n}}{\frac{U_n}{3 - U_n}} = \frac{\frac{6 - 3U_n}{3 - U_n}}{\frac{U_n}{3 - U_n}}$$

$$V_{n+1} = \frac{6 - 3U_n}{3 - U_n} \times \frac{3 - U_n}{U_n} = \frac{6 - 3U_n}{3 - U_n} \times \frac{3 - U_n}{U_n} = \frac{6 - 3U_n}{U_n}$$

- ***Calculons maintenant*** $\boldsymbol{\frac{V_{n+1}}{V_n}}$ ***:***

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} \frac{\frac{6 - 3U_n}{U_n}}{\frac{2 - U_n}{U_n}} = \frac{6 - 3U_n}{U_n} \times \frac{U_n}{2 - U_n}$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{6 - 3U_n}{2 - U_n} = \frac{3(2 - U_{n)}}{2 - U_n} = 3$$

Donc V_n est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $V_0 = \frac{2 - U_0}{U_0} = 2$

II. Raisonnement par récurrence

La démonstration par récurrence est une démonstration qui permet de démontrer une propriété notée en général $\mathcal{P}_n$ pour toutes les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Cette démonstration par récurrence se fait en 3 étapes :

Étape 1 : *On vérifie par calcul que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour la première valeur de n (en général $n = 0$)*

Étape 2 : *On suppose que la propriété est vraie au rang k , c'est-à-dire que $\mathcal{P}_k$ est vraie.*

Étape 3 : *On démontre que la propriété est aussi vraie au rang $k+1$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.*

- ***Il est important d'écrire la propriété au rang $k+1$, c'est-à-dire $\mathcal{P}_{k+1}$ pour savoir ce que l'on doit démontrer.***
- ***Il est également important que la démonstration de l'étape 3 se fasse OBLIGATOIREMENT en utilisant l'hypothèse de l'étape***

1. La propriété dépend de n

Montrons par récurrence la propriété suivante

$$\boldsymbol{Pour\ tout\ n\quad \mathcal{P}_n : 0+1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

✓ ***Étape 1 :*** *On vérifie par calcul que la propriété est vraie pour*

$n = 0 \ : \ \mathcal{P}_0 : 0 = \frac{0(0+1)}{2}$

$0 = 0$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

✓ ***Étape 2 :*** *On suppose que la propriété est vraie au rang k $\mathcal{P}_k$:*

$$0+1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

✓ ***Étape 3 :*** *On démontre que la propriété est aussi vraie au rang $k+1$:*

$$\mathcal{P}_{k+1} : 0+1+2+3+\cdots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$0+1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \underbrace{0+1+2+3+\cdots+k}_{\mathcal{P}_k} + (k+1)$$

$$0+1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$0+1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$0+1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

<u>Donc</u> : En ayant supposé que la propriété est vraie au rang k, alors elle est aussi vraie au rang $k+1$.

<u>Conclusion</u> : La propriété est vraie pour tout n

2. Cas d'une suite récurrente

On considère la suite U_n définie par $U_{n+1} = 0{,}7\, U_n + 0{,}3$ et $U_0 = 4$
Montrons par récurrence la propriété suivante :
Pour tout n, $\mathcal{P}_n : U_n = 3 \times 0{,}7^n + 1$

- ***Étape 1 :** On vérifie par calcul que la propriété est vraie pour $n = 0$:*
  $U_0 = 3 \times 0{,}7^0 + 1 = 4$
  On retrouve bien la valeur de U_0 donnée dans l'énoncé.

- ***Étape 2 :** On suppose que la propriété est vraie au rang k :*

  $\mathcal{P}_k : U_k = 3 \times 0{,}7^k + 1$

- ***Étape 3 :** On démontre que la propriété est aussi vraie au rang $k+1$:*

$$\mathcal{P}_{k+1} : U_{k+1} = 3 \times 0{,}7^{k+1} + 1$$

$U_{k+1} = 0{,}7\, U_k + 0{,}3$
$U_{k+1} = 0{,}7(3 \times 0{,}7^k + 1) + 0{,}3$
$U_{k+1} = 0{,}7 \times 3 \times 0{,}7^k + 0{,}7 \times 1 + 0{,}3$
$U_{k+1} = 3 \times 0{,}7 \times 0{,}7^k + 1$
$U_{k+1} = 3 \times 0{,}7^{k+1} + 1$

On remplace l'expression de U_k par l'hypothèse de l'étape 2 : $U_k = 3 \times 0{,}7^k + 1$

<u>Donc</u> : En ayant supposé que la propriété soit vraie au rang k, alors elle est aussi vraie au rang $k+1$.

<u>Conclusion</u> : La propriété est vraie pour tout n

III. Sens de Variation d'une suite

- *Une suite U_n est* ***croissante*** *si pour tout n, $U_{n+1} > U_n$*
- *Une suite U_n est* ***décroissante*** *si pour tout n, $U_{n+1} < U_n$*
- *Déterminer le* ***sens de variation*** *d'une suite revient à déterminer si cette suite est croissante ou décroissante.*

> *De façon général, pour étudier le sens de variation d'une suite, on va déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$*

1. La suite est une fonction de n : $U_n = f(n)$

a. Variations de la suite en étudiant le signe $U_{n+1} - U_n$:

$$U_n = \frac{3n+5}{n+2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3(n+1)+5}{(n+1)+2} - \frac{3n+5}{n+2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3n+8}{n+3} - \frac{3n+5}{n+2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(3n+8)(n+2)-(3n+5)(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+3)(n+2)} \qquad \boxed{1 > 0 \quad n+3 > 0\,;\, n+2 > 0}$$

$$U_{n+1} - U_n > 0 \iff U_{n+1} > U_n$$

Conclusion : U_n est une suite croissante.

b. Variations de la suite en étudiant les variations de la fonction correspondante

$$U_n = \frac{3n+5}{n+2} \Rightarrow f(x) = \frac{3x+5}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - 1(3x+5)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$$

La fonction $f(x)$ est donc croissante.

Au vu des valeurs de $U_0 = \frac{5}{2}$ *et* $U_1 = \frac{8}{3}$ *, on peut supposer que la suite est croissante. Montrons-le par récurrence :*

- ***Étape 1 :*** $U_0 = \frac{5}{2} < U_1 = \frac{8}{3}$
- ***Étape 2 :*** *on suppose que* $U_k < U_{k+1}$
- ***Étape 3 :*** *on montre que* $U_{k+1} < U_{k+2}$

Par hypothèse, on sait que $U_k < U_{k+1}$ De plus, on sait également que la fonction $f(x)$ est croissante.

$$U_k < U_{k+1} \Leftrightarrow f(U_k) < f(U_{k+1})$$

$$U_k < U_{k+1} \Leftrightarrow U_{k+1} < U_{k+2}$$

Conclusion : *U_n est une suite croissante.*

2. Cas d'une suite récurrente

Dans le cas d'une suite récurrente, le sens de variation de la suite va dépendre de la valeur du premier terme. On va alors étudier le sens de variation de la suite soit par récurrence, soit par inégalités successives (mais toujours par récurrence).

Exemple : $U_{n+1} = 0{,}5\ U_n - 10$

1er cas : $U_0 = -50$

- $U_1 = 0{,}5\ U_0 - 10$

  $U_1 = 0{,}5 \times (-50) - 10 = 35$
- $U_2 = 0{,}5\ U_1 - 10$

  $U_2 = 0{,}5 \times (-35) - 10 = -37{,}5$

2éme cas : $U_0 = 50$

- $U_1 = 0{,}5\ U_0 - 10$

  $U_1 = 0{,}5 \times 50 - 10 = 15$
- $U_2 = 0{,}5\ U_1 - 10$

  $U_2 = 0{,}5 \times 15 - 10 = -2{,}5$

Pour la même suite, on voit bien que selon la valeur du premier terme, la suite peut être croissante ou décroissante.

a. Cas d'une suite croissante

$U_{n+1} = 0{,}5\ U_n + 5\ et\ \ U_0 = 1$

On va calculer les termes U_1 et U_2 pour conjecturer (c'est-à-dire émettre une hypothèse) sur le sens de variation de la suite.

- $U_1 = 0{,}5\ U_0 + 5 = 5{,}5$
- $U_2 = 0{,}5\ U_1 + 5 = 7{,}75$

Au vu des valeurs de U_0, U_1 et U_2 : $U_0 < U_1 < U_2$
On peut donc supposer que la suite est croissante.
On va alors le démontrer par récurrence.

✓ ***Étape 1 :*** *On vérifie par calcul que $U_0 < U_1$. Ce qui a déjà été fait.*

✓ ***Étape 2 :*** *On suppose que la propriété est vraie au rang k :* $U_{k+1} > U_k$

✓ ***Étape 3 :*** *On démontre que la propriété est aussi vraie au rang* $k + 1 :\ U_{k+2} > U_{k+1}$

Pour démontrer que $U_{k+2} < U_{k+1}$, on va étudier le signe de $U_{k+2} - U_{k+1}$, puis vérifier que le résultat est positif.

$U_{k+2} - U_{k+1} = (0{,}5\ U_{k+1} + 5) - (0{,}5\ U_k + 5)$

$U_{k+2} - U_{k+1} = 0{,}5\ U_{k+1} + 5 - 0{,}5\ U_k - 5$

$U_{k+2} - U_{k+1} = 0{,}5\ U_{k+1} - 0{,}5\ U_k$

$U_{k+2} - U_{k+1} = 0{,}5\ (U_{k+1} - U_k)$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence (Étape 2) :

$U_{k+1} > U_k \iff U_{k+1} - U_k > 0$

Donc : $U_{k+2} - U_{k+1} = 0{,}5\ (U_{k+1} - U_k)$ *est le produit de 2 termes positifs. On en déduit alors :* $U_{k+2} - U_{k+1} > 0 \iff U_{k+2} > U_{k+1}$

Conclusion *: La suite définie par* $U_{n+1} = 0{,}5\ U_n + 5$ *et* $U_0 = 1$ *est une suite croissante.*

b. Cas d'une suite décroissante

$$U_{n+1} = 0{,}3\ U_n - 7 \text{ et } U_0 = 10$$

On va calculer les termes U_1 *et* U_2 *pour conjecturer c'est-à-dire émettre une hypothèse sur le sens de variation de la suite.*

- $U_1 = 0{,}3\ U_0 - 7 = -4$
- $U_2 = 0{,}3\ U_1 - 7 = -8{,}2$

Au vu des valeurs de U_0, U_1 *et* U_2 *, on a* $U_0 > U_1 > U_2$.
On peut donc supposer que la suite est décroissante. On va donc le démontrer par inégalités successives.

✓ ***Étape 1 :*** *On vérifie par calcul que* $U_1 < U_0$. *Ce qui a déjà été fait.*

✓ ***Étape 2 :*** *On suppose que la propriété est vraie au rang* k *:* $U_{k+1} < U_k$

✓ ***Étape 3 :*** *On démontre que la propriété est aussi vraie au rang* $k+1$ *:*

$$U_{k+2} < U_{k+1}$$

Or, $U_{k+2} = 0{,}3\ U_{k+1} - 7$ *et* $U_{k+1} = 0{,}3\ U_k - 7$
$U_{k+1} < U_k \iff 0{,}3U_{k+1} < 0{,}3U_k$
$U_{k+1} < U_k \iff 0{,}3U_{k+1} - 7 < 0{,}3U_k - 7$

$U_{k+1} < U_k \ \Leftrightarrow \ U_{k+2} < U_{k+1}$

<u>Conclusion</u> *: La suite définie par* $U_{n+1} = 0{,}3\,U_n - 7$ *et* $U_0 = 10$ *est une suite décroissante.*

IV. *<u>Suite majorée - suite minorée – suite bornée</u>*

- *On dit qu'une suite U_n est **majorée** si il existe un nombre M tel que $U_n < M$: M s'appelle le majorant de la suite*
- *On dit qu'une suite U_n est **minorée** si il existe un nombre m tel que $U_n > m$: m s'appelle le minorant de la suite*
- *On dit qu'une suite U_n est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée c'est-à-dire qu'il existe un nombre M et un nombre m tel que $m < U_n < M$*

1. <u>La suite est une fonction de n</u> : $\boldsymbol{U_n = f(n)}$

$$U_n = \frac{6n^2}{2n^2 + 1}$$

On veut démontrer que la suite U_n est majorée par 3 c'est-à-dire $U_n \leq 3$.

Montrer que $U_n \leq 3$ revient à démontrer que $U_n - 3 \leq 0$

$$U_n - 3 = \frac{6n^2}{2n^2 + 1} - 3 = \frac{6n^2 - 3(2n^2 + 1)}{2n^2 + 1} = \frac{-3}{2n^2 + 1} \leq 0$$

2. Suite récurrente

$\boldsymbol{Exemple\ 1}$: $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 4}{2}$; $U_1 = 2$

On va montrer par récurrence que la suite U_n est majorée par 4.

Étape 1 :
On vérifie par calcul que $U_1 < 4$:
$U_1 = 2 < 4$

Étape 2 :
On suppose que la propriété est vraie au rang k : $U_k < 4$

Étape 3 : *On démontre que la propriété est aussi vraie au rang $k+1$:*

$$U_{k+1} < 4$$

$$U_{k+1} - 4 = \frac{U_k + 4}{2} - 4 = \frac{U_k + 4 - 8}{2} = \frac{U_k - 4}{2} < 0 \ \ car\ U_k < 4$$

Conclusion *: la suite U_n est majorée par 4.*

$\boldsymbol{Exemple\ 2}$: $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 12}$; $U_1 = 5$

On veut démontrer que la suite U_n est minorée par 4 : $U_n > 4$.

Étape 1 : *On vérifie par calcul que* $U_1 > 4$.
Or, $U_1 = 5 > 4$

Étape 2 : *On suppose que la propriété est vraie au rang k :*
$U_k > 4$

Étape 3 : *On démontre que la propriété est aussi vraie au rang*

$k + 1$ *:* $U_{k+1} > 4$

$$U_{k+1} - 4 = \sqrt{U_k + 12} - 4$$

$$U_{k+1} - 4 = \frac{\left(\sqrt{U_k + 12} - 4\right)\left(\sqrt{U_k + 12} + 4\right)}{\sqrt{U_k + 12} + 4}$$

On multiplie par la quantité conjuguée pour déterminer le signe de :

$U_{k+1} - 4$ *:*

$$U_{k+1} - 4 = \frac{U_k + 12 - 16}{\sqrt{U_k + 12} + 4}$$

$$U_{k+1} - 4 = \frac{U_k - 4}{\sqrt{U_k + 12} + 4} > 0 \ car\ U_k > 4 \Leftrightarrow U_k - 4 > 0$$

<u>Conclusion</u> : la suite U_n est minorée par 4.

V. <u>Limite d'une suite</u>

La limite d'une suite correspond à la valeur l dont tous les termes de la suite se rapprochent. Par exemple, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 5$ signifie que plus n grandit ($n \longrightarrow +\infty$), plus les termes de la suite se rapprochent de 5.

- *Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$, on dit que la suite U_n **<u>converge</u>** vers l.*
- *Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \pm\infty$, on dit que la suite U_n **<u>diverge</u>**.*

<u>RÉGLE DE CALCUL</u> :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$ *avec* $k > 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ *avec* $k > 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ *avec* $k > 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0 \ si\ 0 < q < 1$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty \ si\ q > 1$

Il existe 4 FORMES INDETERMINEES : $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0 \times \infty$; $+\infty - \infty$

1. La suite est une fonction de n : $\boldsymbol{U_n = f(n)}$

a. Exemple simple

$$U_n = \frac{3n+1}{2n-5}$$

Dans un premier temps, on calcule la limite du numérateur et la limite du dénominateur, puis on effectue le quotient des 2 résultats.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} 3n+1 = +\infty \\ \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} 2n-5 = +\infty \end{array}\right\}$$ *Par quotient, on obtient :* $\frac{+\infty}{+\infty}$ *qui est une forme indéterminée.*

Il faut donc lever cette indétermination pour déterminer la limite de la suite. Le principe est de mettre en facteur au numérateur et au dénominateur la plus grande puissance de n qui apparait.

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{2n-5}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{2n-5}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2-\frac{5}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{2-\frac{5}{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{1}{n}=3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{5}{n}=2\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{3}{2}}$$

b. *Suite définie par une puissance de n*

$U_n = 5 - 3 \times 0{,}7^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0.7^n = 0 \quad car \quad 0 < 0.7 < 1$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times 0.7^n = 0$

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 5 - 3 \times 0.7^n = 5}$

2. *Lever la Forme Indéterminée* $\frac{\infty}{\infty}$

$$U_n = \frac{7-3^n}{2^n+1}$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 7 - 3^n = -\infty \;\; car\ 3 > 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n + 1 = +\infty \;\; car\ 2 > 1$

Par quotient, on obtient : $\frac{-\infty}{+\infty}$ *qui est une forme indéterminée*

> *Pour lever cette indétermination, le principe est de mettre en facteur au numérateur et au dénominateur la puissance de n (c'est-à-dire 3^n pour le numérateur et 2^n pour le dénominateur)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7-3^n}{2^n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n\left(\frac{7}{3^n}-1\right)}{2^n\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7-3^n}{2^n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{2^n} \times \frac{\frac{7}{3^n}-1}{1+\frac{1}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7-3^n}{2^n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{\frac{7}{3^n}-1}{1+\frac{1}{2^n}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{3^n}-1=-1 \\ \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2^n}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{7}{3^n}-1}{1+\frac{1}{2^n}} = -1$$

On obtient alors :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty \\ \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{7}{3^n}-1}{1+\frac{1}{2^n}} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty}$$

3. ***Lever la Forme Indéterminée*** $0 \times \infty$

$$U_n = \frac{-7}{n^2} \times (3n-12)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-7}{n^2} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3n-12 = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{on obtient} : 0 \times +\infty$$

Pour lever cette indétermination, il suffit de développer l'expression de U_n.

$$U_n = \frac{-7}{n^2} \times (3n-12) = \frac{-21n}{n^2} + \frac{84}{n^2} = \frac{-21}{n} + \frac{84}{n^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-21}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{84}{n^2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 0}$$

VI. Théorème de convergence

- ✓ *Toute suite croissante majorée converge.*
- ✓ *Toute suite décroissante minorée converge.*

1. La suite est une fonction de n : $U_n = f(n)$

$$U_n = \frac{3n-5}{n+1}$$

a. Montrons que la suite U_n est croissante

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3(n+1)-5}{(n+1)+1} - \frac{3n-5}{n+1}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(3n-2)(n+1)-(3n-5)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{8}{(n+2)(n+1)}$$

Or: $8 > 0\,; n+2 > 0 \; et \; n+1 > 0 \; car \; n \in \mathbb{N}$

Donc : $U_{n+1} - U_n > 0 \iff U_{n+1} > U_n$

<u>Conclusion</u> : U_n *est une suite croissante.*

b. Montrons que la suite U_n est majorée par 3

$$U_n - 3 = \frac{3n-5}{n+1} - 3$$

$$U_n - 3 = \frac{3n-5-3(n+1)}{n+1}$$

$$U_n - 3 = \frac{-8}{n+1} < 0$$

<u>Conclusion</u> : U_n *est majorée par 3*

U_n *est croissante majorée. Donc* U_n *converge.*

2. Cas d'une suite récurrente

$U_{n+1} = 0{,}75U_n + 3$ *et* $U_0 = 40$

a. Montrons que la suite U_n est décroissante par récurrence.

Étape 1 : *On vérifie par calcul que* $U_1 < U_0$.
$U_1 = 0{,}75U_0 + 3 = 33$
On a bien $U_1 < U_0$

Étape 2 : *On suppose que la propriété est vraie au rang* k *:* $U_{k+1} < U_k$

Étape 3 : *On démontre que la propriété est aussi vraie au rang* $k+1$ *:*

$$U_{k+2} < U_{k+1}$$

$U_{k+2} = 0{,}3\, U_{k+1} - 7$ *et* $U_{k+1} = 0{,}3\, U_k - 7$

$U_{k+1} < U_k \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}75U_{k+1} < 0{,}75U_k$

$U_{k+1} < U_k \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}75U_{k+1} + 3 < 0{,}75U_k + 3$

$U_{k+1} < U_k \quad \Leftrightarrow \quad U_{k+2} < U_{k+1}$

Conclusion : La suite définie par $U_{n+1} = 0{,}75\, U_n + 3$ *et* $U_0 = 40$ *est une suite décroissante.*

b. Montrons que la suite U_n est minorée par 12

Étape 1 : *On vérifie que* $U_0 > 12$.
$U_0 = 40 > 12$

Étape 2 : *On suppose que la propriété est vraie au rang* k *:*
$U_k > 12$

Étape 3 : *On démontre que la propriété est aussi vraie au rang* $k+1$ *:*

$$U_{k+1} > 12$$

$U_{k+1} - 12 = 0{,}75\, U_k + 3 - 12$

$U_{k+1} - 12 = 0{,}75\, U_k - 9$

$$U_{k+1} - 12 = 0{,}75\left(U_k - \frac{9}{0{,}75}\right)$$

$$U_{k+1} - 12 = 0{,}75(U_k - 12) > 0 \; car \;\; U_k > 12$$

<u>Conclusion</u> : La suite définie par U_n *est une suite minorée par 12.*

U_n *est décroissante minorée. Donc* U_n *converge*

VII. *<u>Théorème de comparaison</u>*

- ✓ *Soient 2 suites* U_n *et* V_n *tel que* $U_n > V_n$.
  Si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty \; alors \; \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

- ✓ *Soient 2 suites* U_n *et* V_n *tel que* $U_n < V_n$.
  Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty \; alors \; \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$.

- ✓ ***<u>Théorème des gendarmes</u> :*** *Soient 3 suites* U_n , V_n *et* W_n
  tel que : $V_n < U_n < W_n$ *tel que* $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = l$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = l$.
  Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$

1. *<u>Cas d'une suite récurrente</u>*

Soit la suite U_n *définie par* $U_{n+1} = 3U_n - 2n + 1$ *et* $U_0 = 5$

a. Montrez que $U_n > n + 1$. Raisonnons par récurrence :

<u>Etape 1 :</u> *On vérifie par calcul que* $U_0 > 0 + 1$ *:* $U_0 = 5 > 1$

<u>Etape 2 :</u> *On suppose que la propriété est vraie au rang* k *:* $U_k > k + 1$

<u>Etape 3 :</u> *On démontre que la propriété est aussi vraie au rang* $k + 1$ *:*

$$U_{k+1} > k + 2$$

Dans ce cas, il faut raisonner par inégalités successives pour se ramener à l'expression de $U_{k+1} = 3U_k - 2k + 1$ *:*

$U_k > k + 1 \iff 3U_k > 3k + 3$

$U_k > k + 1 \iff 3U_k - 2k > k + 3$

$U_k > k + 1 \iff 3U_k - 2k + 1 > k + 4$

$U_k > k + 1 \iff U_{k+1} > k + 2 \quad car\ k + 4 > k + 2$

<u>Conclusion</u> : Pout tout k *,* $U_n > n + 1$

b. Déterminons alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

On vient de démontrer que $U_n > n + 1$ $pour\ tout\ n$.

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

2. <u>Théorème des gendarmes</u>

Soit la suite U_n *définie par* $U_n = \dfrac{4 - 3\sin(2n)}{n}$

En utilisant le théorème de gendarmes, démontrez que U_n *converge.*

$-1 \leq sin(2n) \leq 1 \iff -3 \leq -3\sin(2n) \leq 3$

$$-1 \leq \sin(2n) \leq 1 \iff 1 \leq 4 - 3\sin(2n) \leq 7$$

$$-1 \leq \sin(2n) \leq 1 \iff \frac{1}{n} \leq \frac{4 - 3\sin(2n)}{n} \leq \frac{7}{n}$$

$$Or\ : \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0\ et\ \lim_{n \to +\infty} \frac{7}{n} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

On en déduit alors que U_n *est une suite convergente vers 0.*